Hafta 1:
İşaretler ve Sistemler

Ele Alınacak Ana Konular

- Sürekli-zaman ve ayrık-zaman işaretler
- Bağımsız değişkenin dönüştürülmesi
- Üstel ve sinüzoidal işaretler
- İmpuls ve birim basamak fonksiyonları
- Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler
- Sistemlerin temel özellikleri

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman işaretler

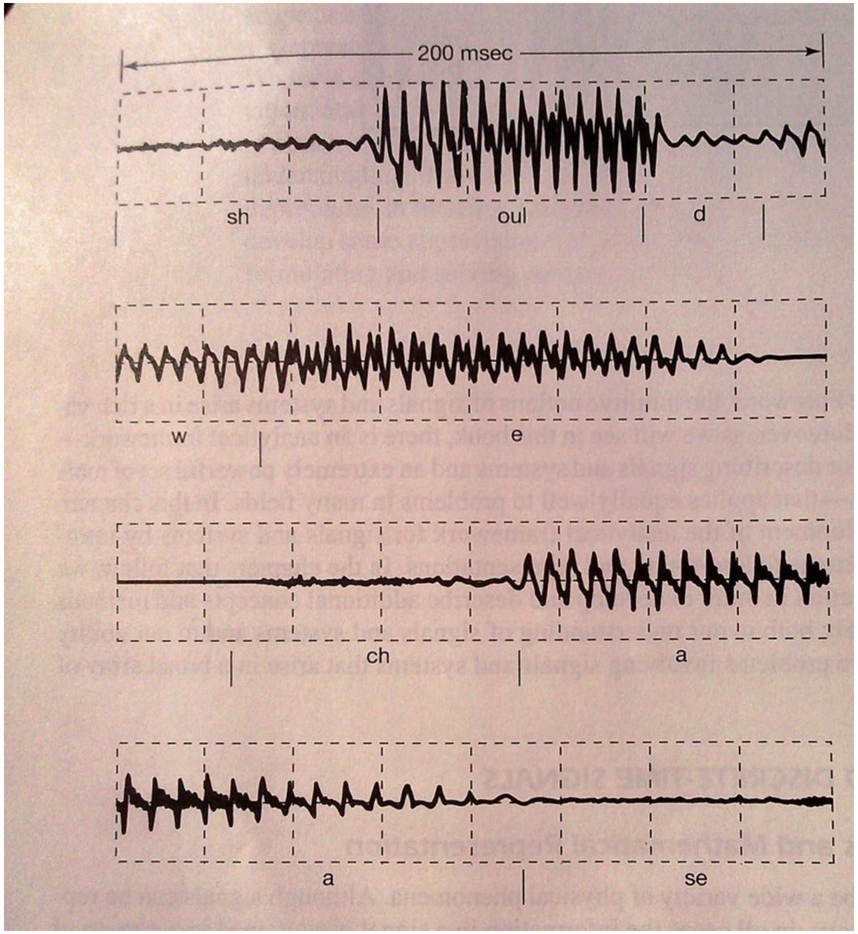
- İşaretler bir olayın davranışı veya doğası hakkında bilgi içermektedir.

- İşaretleri çeşitli şekillerde ifade etmek mümkündür. İşaretler, matematiksel olarak bir veya daha fazla bağımsız değişkenin fonksiyonu biçiminde temsil edilir.

- Örneğin, ses işareti zamanın fonksiyonu olarak akustik basınçla belirtilir. Benzer şekilde, bir görüntü iki konum değişkeninin fonksiyonu olarak parlaklıkla tanımlanır.

- Bu derste, aksi belirtilmediği sürece bir bağımsız değişkenli işaretleri inceleyecek ve bağımsız değişkene ZAMAN diyeceğiz. Ancak, tüm fiziksel olaylarda bağımsız değişkenin zaman olmadığı hatırda tutulmalıdır. Örneğin, meteorolojik araştırmalarda yüksekliğe bağlı olarak hava basıncı, sıcaklık ve rüzgar hızının değişimi hakkında bilgi önemlidir. Bu durumda bağımsız değişken yüksekliktir. İncelenen işaretler ise hava basıncı, sıcaklık ve rüzgar hızıdır.

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman işaretler



Bir ses kaydı. İşaret, “should we chase” kelimlerini, zamana bağlı olarak akustik basınç değişimleri şeklinde temsil etmektedir. Üst satır “should”, ikinci satır “we” ve son iki satır “chase” kelimlerine karşılık gelmektedir.

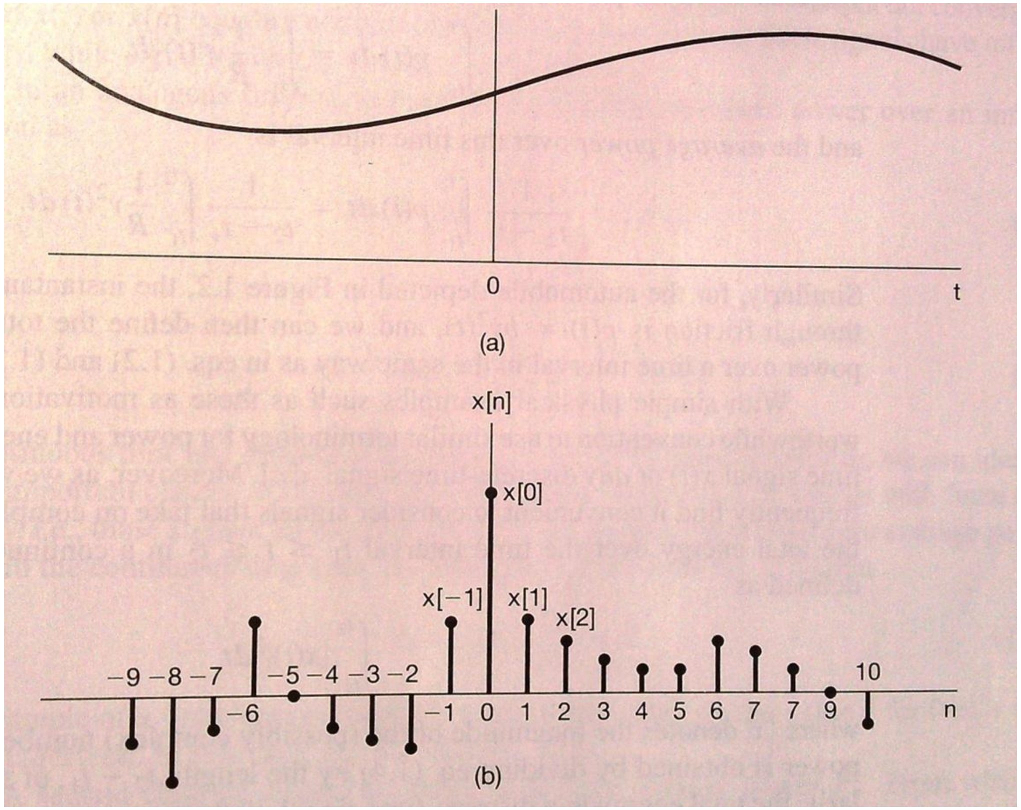
Sürekli-zaman ve ayrık-zaman işaretler

- Bu derste, sürekli-zaman ve ayrık-zaman şeklinde sınıflandırılan temel iki tür işareti inceleyeceğiz. Sürekli-zaman işaret durumunda, bağımsız değişken süreklidir ve dolayısıyla işaret bağımsız değişkenin tüm değerleri için tanımlıdır. Diğer yandan, ayrık-zaman işartler sadece belirli zamanlarda tanımlıdır ve bağımsız değişken ayrık değerler alır.

- Zamanın fonksiyonu olarak ses işareti ve yüksekliğin fonksiyonu olarak atmosferik basınç sürekli-zaman işaretlere örnektir. İstanbul Menkul Kıymetler Borsası (İMKB) haftalık endeksi ve dünyadaki ülkelere göre toplam nüfüs ayrık-zaman işaretlere örnektir.

- Sürekli-zaman ve ayrık-zaman işaretlerini birbiriyle karıştırmamak amacıyla, sürekli ve ayrık durumlarda bağımsız değişken için sırasıyla t ve n; işaretler için de $x(t)$ ve $x[n]$ notasyonlarını kullanacağız.

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman işaretler



(a) Sürekli-zaman ve (b) ayrık-zaman işaretlerinin grafik gösterilimi. 2.5 kişiden oluşan bir aile için ortalama kazançtan söz etmenin anlamsız olması gibi bir ayrık-zaman işaretinin 3.5. örneği hakkında söz etmek de anlamlı değildir. Bu yüzden, kaynağı ne olursa olsun, ayrık-zaman işaretlerinin *n*'nin tamsayı değerleri için tanımlı olduğuna dikkat ediniz.

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman işaretler

- İşaretler çeşitli fiziksel olayları temsil edebilir. Çoğu uygulamada, ilgilenilen işaret bir fiziksel sistemdeki güç ve enerjiyi belirten fiziksel büyüklüklerle doğrudan ilişkilidir.
- Bir sürekli-zaman işareti $x(t)$'de $t_1 \leq t \leq t_2$ aralığında ve bir ayrık-zaman işareti $x[n]$'de $n_1 \leq n \leq n_2$ aralığındaki TOPLAM ENERJİ, $|x|$ sayının genliğini göstermek üzere

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \, dt, \qquad \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

ilişkilerinden hesaplanır. ORTALAMA GÜÇ, sonuçlar ilgili aralıkların boyuna bölünür (sürekli durumda $t_2 - t_1$; ayrık durumda $n_2 - n_1 + 1$) elde edilir.
- Yukarıda verilen ilişkileri sonsuz aralık durumuna genelleştirmek mümkündür. Aralığın sonsuza gitmesi limit durumunda ilgili tanımlar elde edilir:

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt \qquad E_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt \qquad P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman işaretler

- Enerji ve güç içeriğine göre işaretler üç sınıfa ayrılabilir.

- Sonlu enerjiye sahip ($E_\infty < \infty$) işaretlere ENERJİ İŞARETİ denir. Enerji işaretlerinin gücü sıfır olmalıdır. Bir örnek vermek gerekirse, [0,1] aralığında 1, diğer zamanlarda sıfıra eşit olan bir sürekli-zaman işaretinin enerji işareti olduğunu göstermek zor değildir.

- Sonlu güce sahip işaretlere ($P_\infty < \infty$) GÜÇ İŞARETİ denir. Güç işaretlerinin enerjisi sonsuz olmalıdır. Değeri 4 olan sabit bir ayrık-zaman işareti (tüm n değerleri için $x[n] = 4$) güç işaretidir.

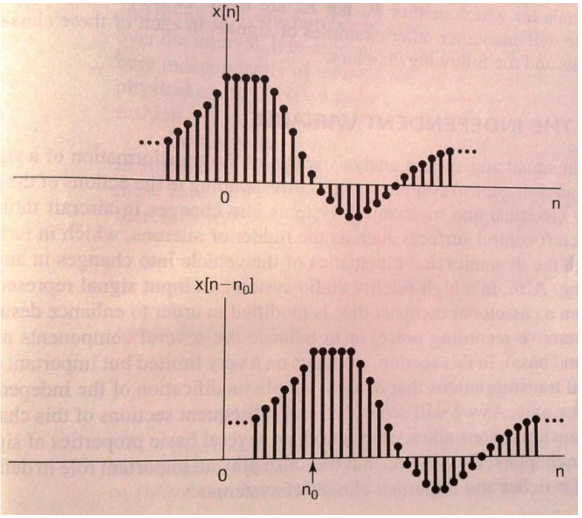
- Diğer bir grup işaretler için ne enerji ne de güç sonlu bir değere sahiptir. $x(t) = t$ şeklinde bir işaret bu gruba girmektedir.

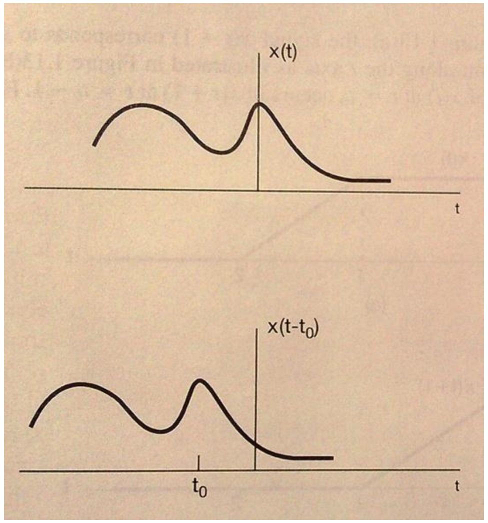
Bağımsız değişkenin dönüşümü

- İşaret ve sistem analizindeki önemli bir kavram bir işaretin dönüştürülmesidir.
- Örneğin, bir uçak kontrol sisteminde pilotun eylemlerine karşılık işaretler elektriksel ve mekanik sistemler aracılığıyla uçağın hız veya konumundaki değişikliklere dönüştürülür.
- Diğer bir örnek olarak, bir ses siteminde kaset veya CD'ye kaydedilmiş müziği temsil eden bir giriş işareti istenilen karakteristikleri iyileştirme, kaydetme gürültüsünü gidermek amacıyla değiştirilebilir.
- Aşağıda, bağımsız değişkene yapılan basit değişikliklerden oluşan dönüşümleri ele alacağız.
- Bu basit dönüşümler, işaretler ve sistemlerin temel özelliklerini tanımlamamıza imkan verecektir.

Bağımsız değişkenin dönüşümü

- Bağımsız değişkene yapılabilecek dönüşümlerden birisine ZAMANDA ÖTELEME denir ve sürekli durum için $x(t\text{-}t_0)$ şeklinde ifade edilir (ayrık-durumda ifade $x[n\text{-}n_0]$'dir). Orijinal ve ötelenmiş işaretlerin şekli aynıdır ancak işaretler birbirlerine göre kaymıştır.

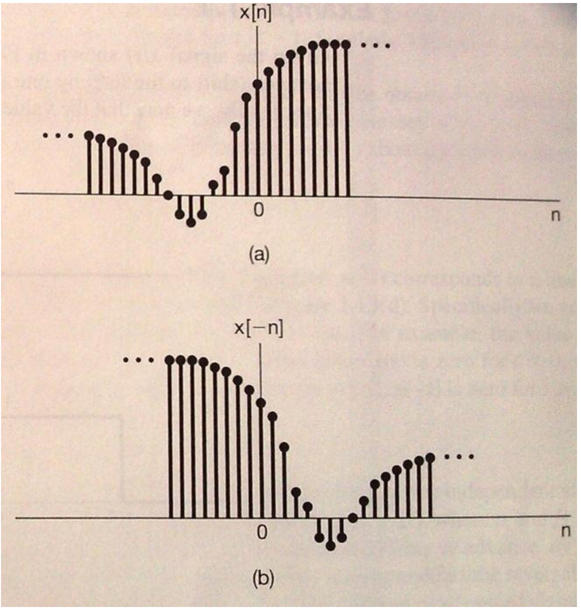


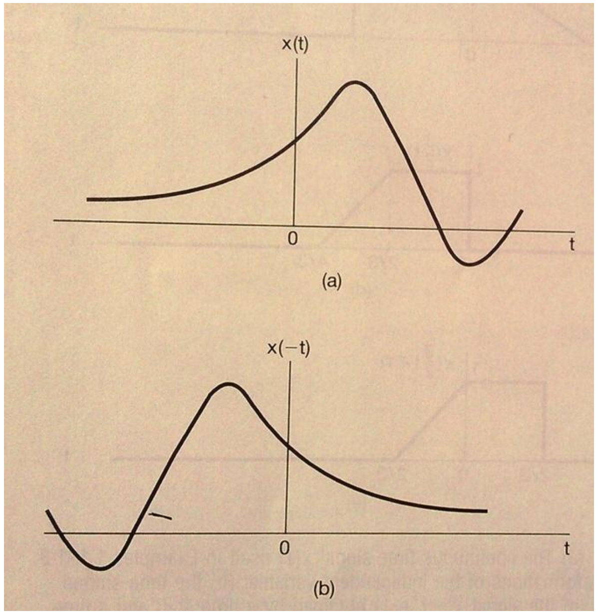


- Öteleme ile radar, sonar ve sismik işaret işleme uygulamalarında karşılaşılır. Bu uygulamalarda, farklı konumlardaki alıcılar bir ortamdan iletilen bir işareti algılar. İşaretin alıcılara ulaşma süreleri arasındaki farktan ötürü alıcılardaki işaretler birbirine göre ötelenmiş olmaktadır.

Bağımsız değişkenin dönüşümü

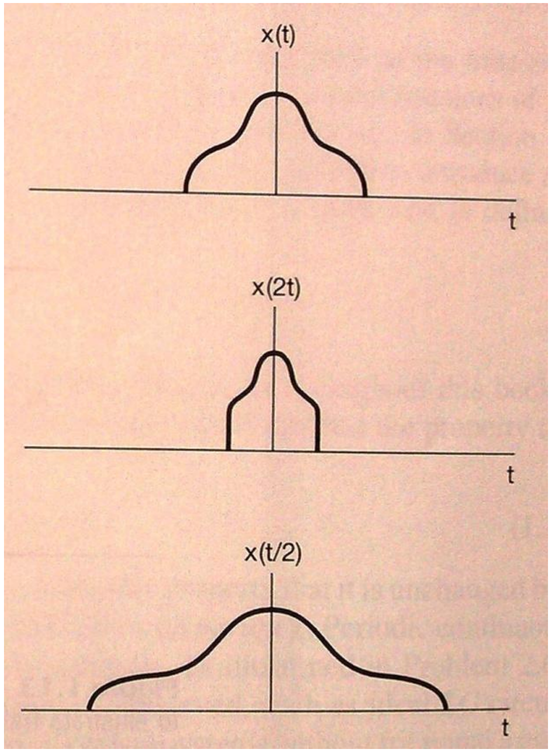
- Bağımsız değişkene yapılabilecek ikinci bir dönüşüme ZAMANI TERSİNE ÇEVİRME denir ve sürekli durumda matematiksel olarak *x*(-*t*) şeklinde ifade edilir. Orijinal işaretin dikey eksen (*t* = 0) etrafında döndürülmesiyle zaman tersine çevrilmiş işaret elde edilir.





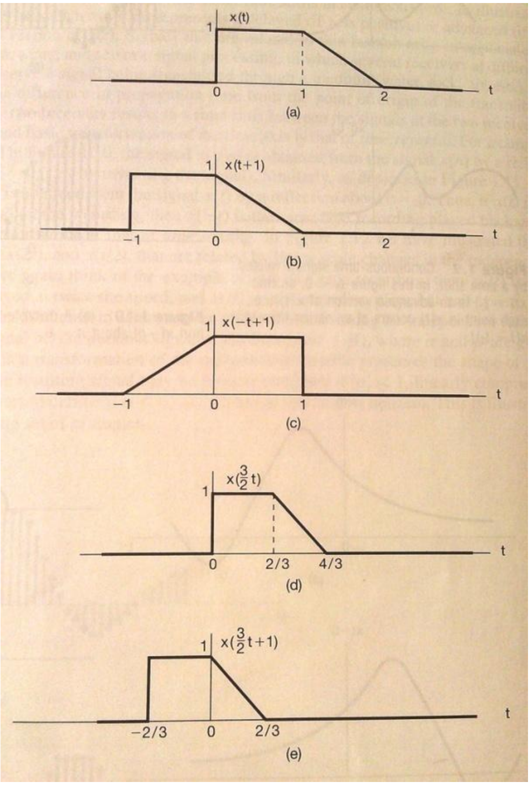
Bağımsız değişkenin dönüşümü

- Bağımsız değişkene yapılabilecek üçüncü dönüşüme ÖLÇEKLEME denir ve sürekli durumda $x(\alpha t)$ biçiminde temsil edilir. α'ya ölçekleme katsayısı denir. α'nın 1'den büyük olması durumunda orijinal işaretin şeklini bozmadan işareti α kadar daraltarak öçeklenmiş işareti elde ederiz. Aksi durumda, orijinal işaret α'nın tersi kadar genişletilir.



Bağımsız değişkenin dönüşümü

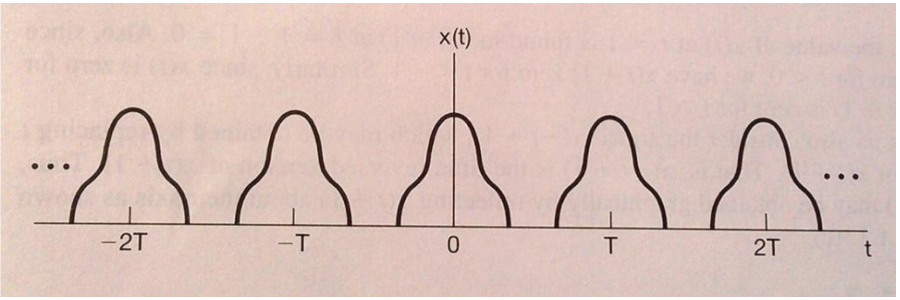
- Şimdi orijinal işarete bu üç temel dönüşümün birlikte uygulanmasını ele alacağız. Genel dönüşüm $x(\alpha t+\beta)$ şeklinde ifade edilebilir. Orijinal işaretten dönüştürülmüş işareti bulmak için , işaret ilk önce β kadar ötelenir, daha sonra otelenmiş işaret α ile ölçeklenir. α'nın negatif olması durumunda ayrıca zaman tersine çevrilir. Aşağıda, bir sürekli-zaman işareti $x(t)$ için, $x(t+1)$, $x(-t+1)$, $x(3/2t)$ ve $x(3/2t+1)$ işaretleri çizilmiştir.



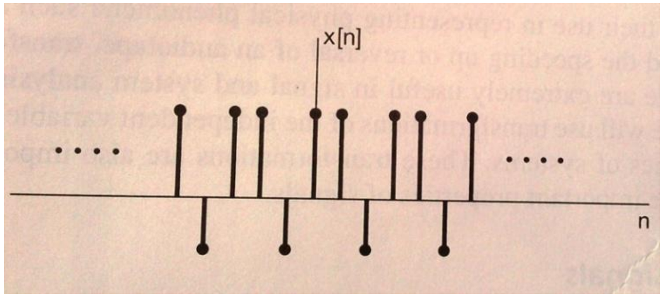
Bağımsız değişkenin dönüşümü

TANIM: Bir sürekli-zaman işareti *t*'nin değerinden bağımsız olarak $x(t) = x(t+T)$ eşitliğini pozitif bir T değeri için sağlıyorsa T periyodu ile periyodiktir. Eşitliğin geçerli olduğu en küçük T değerine temel periyod (T_0) denir. Periyodik olmayan işaretlere aperiyodik denir.

TANIM: Bir ayrık-zaman işareti *n*'nin değerinden bağımsız olarak $x[n] = x[n+N]$ eşitliğini pozitif bir tamsayı N değeri için sağlıyorsa N periyodu ile periyodiktir. Eşitliğin geçerli olduğu en küçük N değerine temel periyod (N_0) denir.



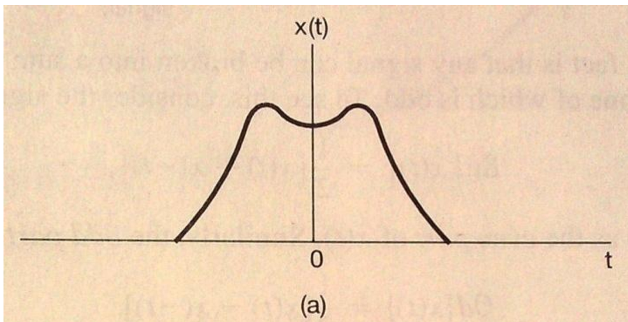
$T_0 = T$



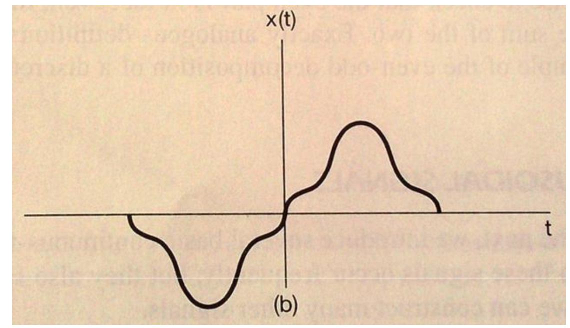
$N_0 = 3.$

Bağımsız değişkenin dönüşümü

TANIM: Bir işaret zaman tersine çevrilmiş haline eşitse ($x(t) = x(-t)$) ÇİFT; zaman tersine çevrilmiş halinin negatifine eşitse ($x(t) = - x(-t)$) TEK işarettir.



çift işaret



tek işaret

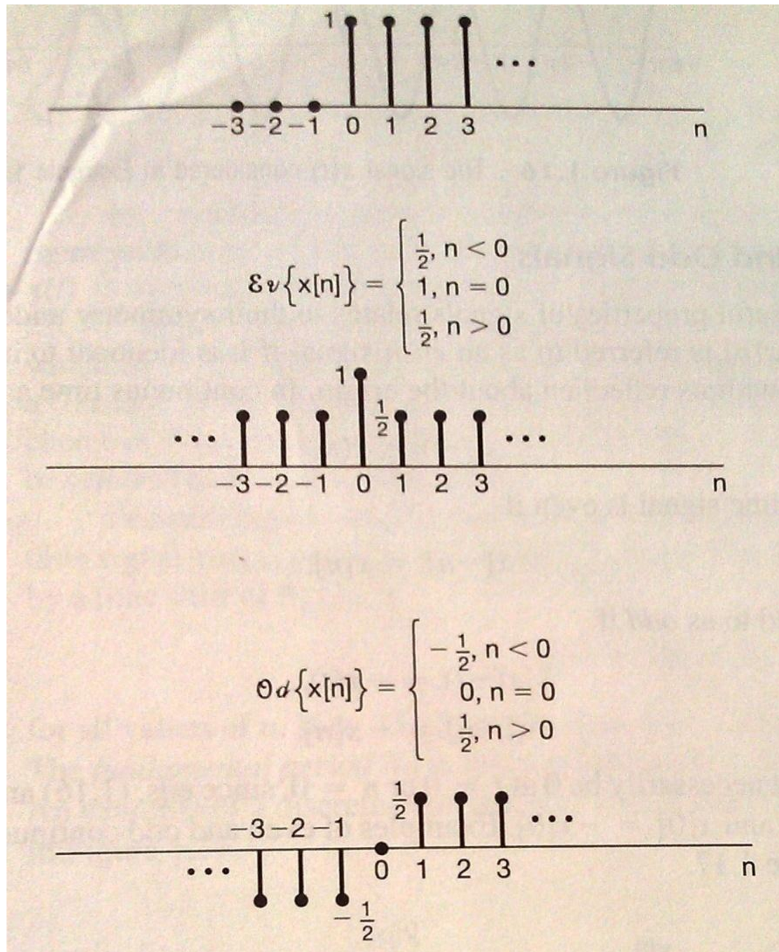
TANIM: Bir işaret ile zaman tersine çevrilmiş halinin toplamının yarısına işaretin ÇİFT PARÇASI denir. Bener şekilde, işaret ile zaman tersine çevrilmiş halinin farkının yarısına işaretin TEK PARÇASI denir.

$$Ev\{x(t)\} = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]$$

$$Od\{x(t)\} = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]$$

Bağımsız değişkenin dönüşümü

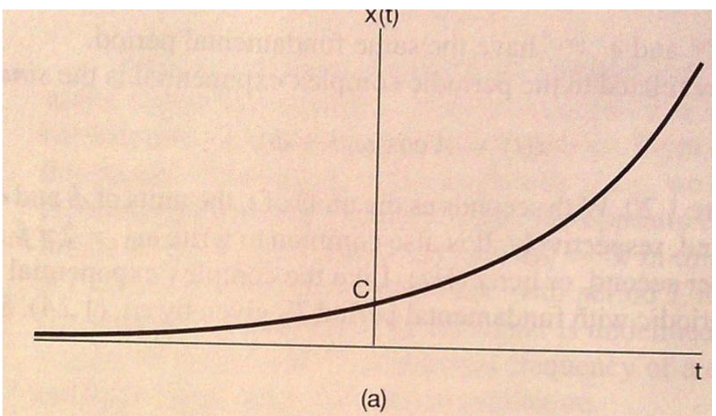
Bir ayrık-zaman işareti ile işaretin çift ve tek parçaları aşağıda verilmiştir.

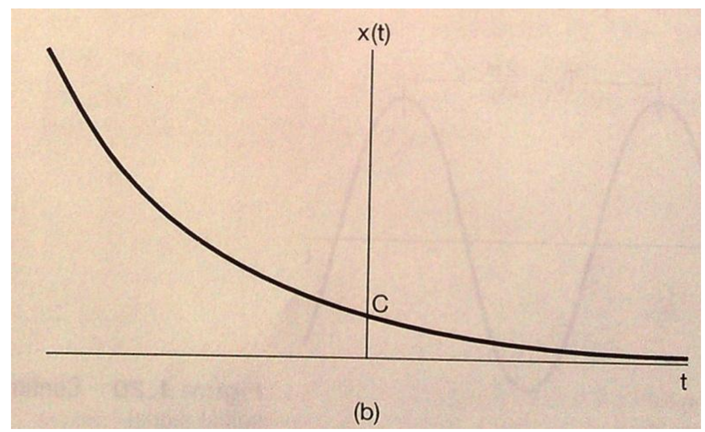


Sürekli-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- Sürekli-zaman karmaşık üstel işaretin genel ifadesi, *C* ve *a* karmaşık sayılar olmak üzere $x(t) = Ce^{at}$'dir. Bu iki parametrenin değerine bağlı olarak karmaşık üstel işaret farklı davranış gösterir.

- Aşağıda gösterildiği gibi *C* ve *a* gerçel ise, iki durum vardır. *a* pozitif ise $x(t)$ artar, aksi halde azalır. Ayrıca, $a = 0$ olduğunda, $x(t)$ sabit olmaktadır.





(a) $a > 0$, (b) $a < 0$.

Sürekli-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- *a* gerçel kısmı sıfır olan karmaşık bir sayı ($a = jw_0t$), yani $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ olsun. Bu durumda $x(t)$ periyodiktir.

- Periyodiklik tanımından, $x(t)$'nin periyodik olması için $e^{j\omega_o(t+T)} = e^{j\omega_0 t}$ eşitliğini sağlayan pozitif bir T değeri bulunabilmelidir. Üstel sayıların özelliğinden

$$e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$$

olduğundan, periyodiklik için $e^{j\omega_0 T} = 1$ olmalıdır.

- *T*'nin alacağı değer w_0'a bağlıdır. $w_0 = 0$ ise, $x(t) = 1$ olup *T*'nin herhangi bir değeri için periyodiktir. $w_0 \neq 0$ ise, en küçük pozitif *T* değeri (temel periyod) için

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

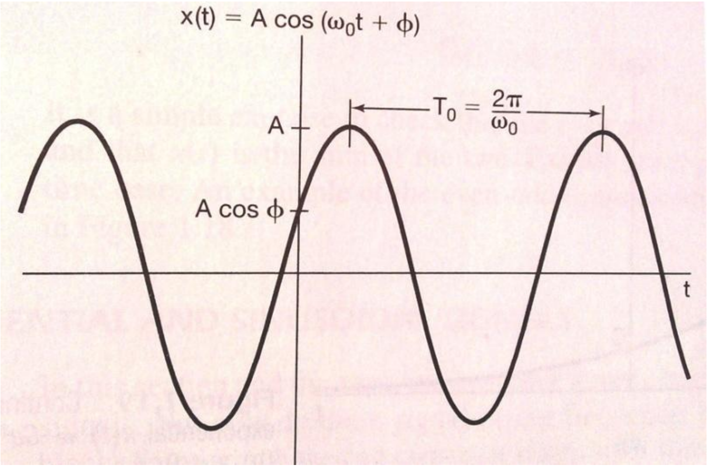
bulunur. O halde, $e^{j\omega_0 t}$ ve $e^{-j\omega_0 t}$ işaretleri aynı temel periyoda sahiptir.

Sürekli-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- Periyodik karmaşık üstel işaretle yakından ilişkili bir işaret $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$ şeklinde tanımlanan sinüzoidal işarettir.

- t'nin birimi saniye ise, ϕ ve ω_0'ın birimleri radyan ve saniye başına radyandır. $\omega_0 = 2\pi f_0$ yazılırsa f_0'ın birimi, saniye başına değişim sayısı veya hertz (Hz)'dir.

- Sinüzoidal işaret periyodik olup temel periyodu $T_0 = \dfrac{2\pi}{|\omega_0|}$ şeklindedir.



Sürekli-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- Euler ilişkisi kullanılarak, karmaşık üstel ve sinüzoidal işaretler birbiri cinsinden yazılabilir. İlişkiler aşağıda verilmiştir:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)$$
$$A\cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 t}$$

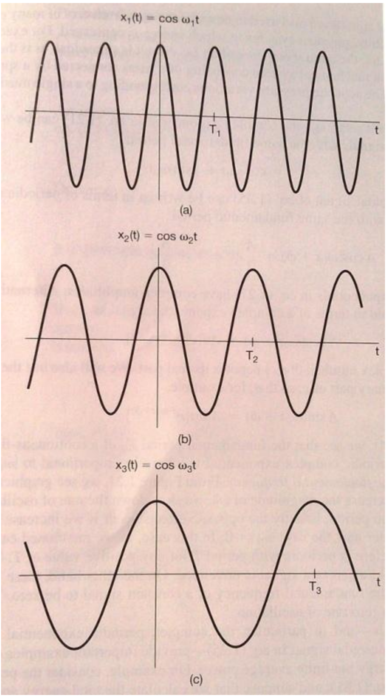
- Eşdeğer olarak, sinüzoidal işaretler, karmaşık üstel işaretin gerçel ve sanal kısmı şeklinde ifade edilebilir:

$$A\cos(\omega_0 t + \phi) = A\mathrm{Re}\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\}$$
$$A\sin(\omega_0 t + \phi) = A\mathrm{Im}\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\}$$

- Üstel işaretler atomik patlamalardaki zincir reaksiyonları, karmaşık kimyasal işlemleri, radyoaktif bozunumu, RC devrelerinin ve sönümlü mekanik sistemlerin yanıtını modellemede kullanılır. Benzer şekilde, sinüzoidal işaretler enerjinin korunduğu fiziksel sistemlerde karşımıza çıkar. Örneğin, bir LC devresinin doğal yanıtı ve bir müzik tonuna karşılık gelen akustik basınç değişimleri sinüzoidaldir.

Sürekli-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- Bir sürekli-zaman sinüzoidal veya periyodik karmaşık üstel işaretin temel periyodu T_0, TEMEL FREKANS olarak adlandırılan $|\omega_0|$ ile ters orantılıdır.



- $\omega_0 = 0$ ise, $x(t)$ sabit olup herhangi bir positif T için periyodiktir. O halde, sabit bir işaretin temel periyodu tanımsızdır. Ancak, sabit bir işaretin temel periyodunu sıfır kabul edebiliriz (sabit bir işaretin değişim hızı sıfırdır).

Sürekli-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- Periyodik karmaşık üstel ve sinüzoidal işaretlerin güç işareti olduğu gösterilebilir.

- Periyodik karmaşık üstel işaretlerden çoğu diğer işaret üretilebilir. Ortak bir periyod ile periyodik olan periyodik üstel işaretler kümesine HARMONİK İLİŞKİLİ KARMAŞIK ÜSTEL KÜMESİ denir.

- $e^{j\omega t}$ işaretinin T_0 ile periyodik olabilmesi için $\omega T_0 = 2\pi k$, $k = 0, 1,2,...$ olmalıdır. $\omega_0 = 2\pi / T_0$ olarak tanımlanırsa, $\omega T_0 = 2\pi k$ koşulunun sağlanması için ω, ω_0'ın katı olmalıdır. O halde, harmonik ilişkili bir karmaşık üstel kümesi, pozitif bir ω_0 frekansının katlarına eşit temel frekansa sahip periyodik üstel işaretler kümesidir:

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- $k = 0$ için $\phi_k(t)$ sabittir, herhangi bir diğer k değeri için $\phi_k(t)$, $|k|\omega_0$ temel frekansıyla veya

$$\frac{2\pi}{|k|\omega_0} = \frac{T_0}{|k|}$$

temel periyodu ile periyodiktir. $\phi_k(t)$'ye k. HARMONİK denir.

Sürekli-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- Sürekli-zaman karmaşık üstel işaretin genel ifadesi, C ve a karmaşık sayılar olmak üzere Ce^{at} ile verildiğini hatırlayınız. C, kutupsal koordinatlarda $C = |C|e^{j\theta}$, a ise kartezyen koordinatlarda $a = r + j\omega_0$ şeklinde ifade edilsin.

- C ve a yerine konulup Euler ilişkisi konulursa karmaşık üstel işaret

$$Ce^{at} = |C|e^{rt}\cos(\omega_0 t + \theta) + j|C|e^{rt}\sin(\omega_0 t + \theta)$$

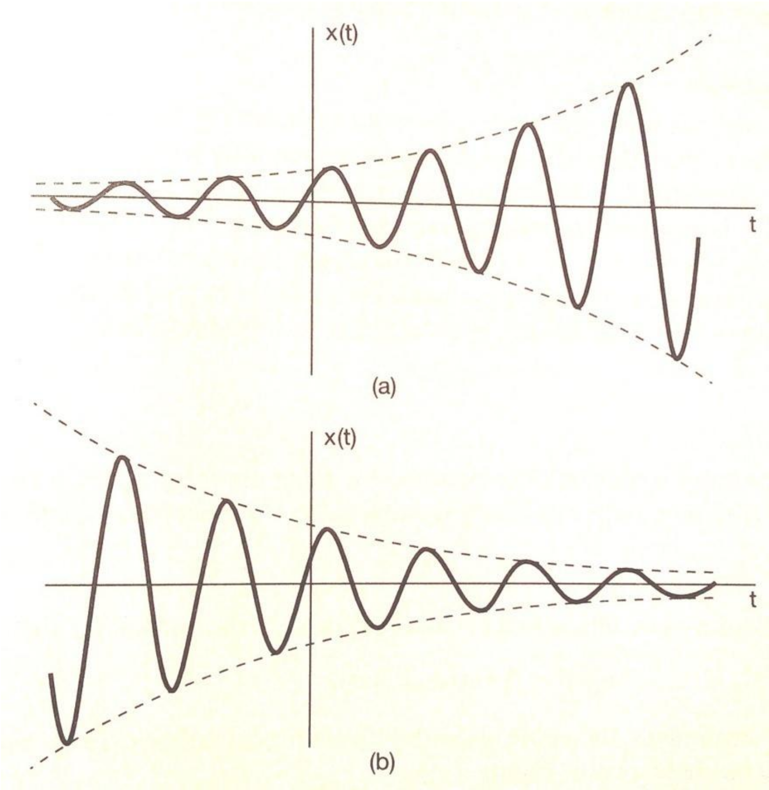
şeklinde yeniden düzenlenebilir. Bu ilişkiden aşağıdaki gözlemler yapılabilir.

- Karmaşık üstel işaretin genliği $|C|e^{rt}$'dir.

- $r = 0$ ise, karmaşık üstelin gerçel ve sanal kısımları sinüzoidaldir.

- $r > 0$ ise, gerçel ve sanal kısımlar artan üstel işaret, aksi halde azalan üstel işaret ile çarpılır. Azalan üstel işaret ile çarpılan sinüzoidal işaretlere SÖNÜMLÜ sinüzoidal denir. Sönümlü sinüzoidal işaretlerle RLC devrelerinde ve mekanik sistemlerde karşılaşılır. Bu tür sistemler, zamanla azalan salınımlı enerji üretir.

Sürekli-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler



(a) Artan sinüzoidal işaret $x(t) = Ce^{rt}\cos(\omega_0 t + \theta)$, $r > 0$.
(b) Azalan sinüzoidal işaret $x(t) = Ce^{rt}\cos(\omega_0 t + \theta)$, $r < 0$.
Şekillerde kesikli eğriler $|C|e^{rt}$'fonksiyonlarına karşılık gelmektedir.

Ayrık-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

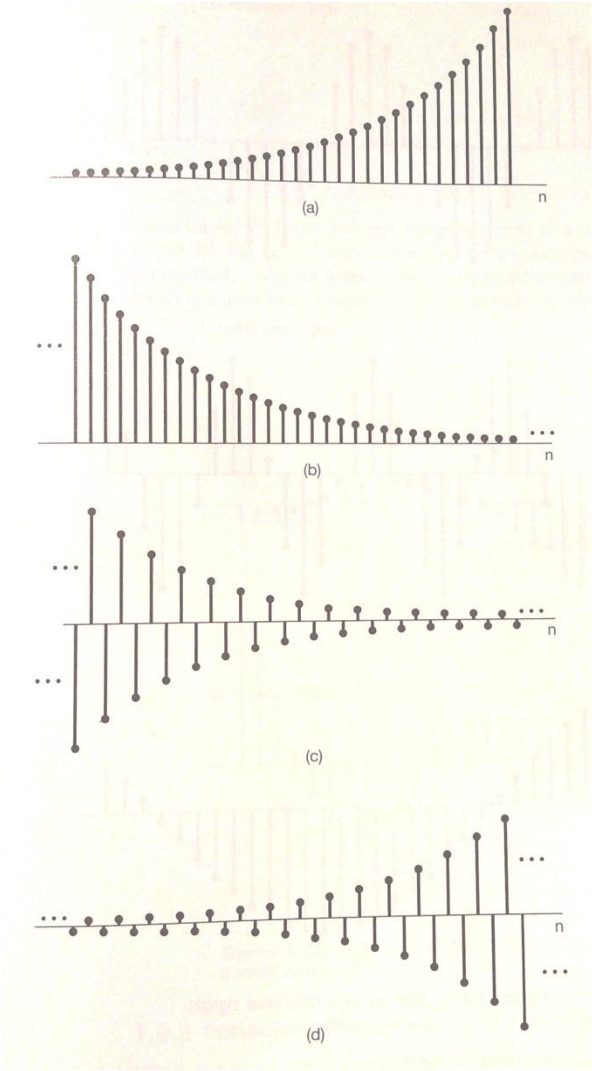
- Ayrık-zaman karmaşık üstel işaretin genel ifadesi, C ve α karmaşık sayılar olmak üzere $x[n] = C\alpha^{n}$'dir. $\alpha = e^{\beta}$ olmak üzere, üstel işaret $x[n] = Ce^{\beta n}$ şeklinde de yazılabilir. C ve α'nın aldığı değerlere göre işaretin şekli değişir.

- C ve α gerçel ise, aşağıdaki durumlar mümkündür:

  $|\alpha| > 1$ ise, işaretin genliği n arttıkça üstel olarak artar.
  $|\alpha| < 1$ ise, işaretin genliği n arttıkça üstel olarak azalır.
  α pozitif ise, işaretin tüm değerleri aynı işarete (hepsi pozitif veya negaif) sahiptir.
  α negatif ise, $x[n]$'nin işareti örnekten örneğe değişir.
  $\alpha = 1$ ise, $x[n]$ sabittir ($x[n] = C$).
  $\alpha = -1$ ise, $x[n]$ dönüşümlü olarak C ve $-C$ değerlerini alır.

- Ayrık-zaman gerçel üstel işaret doğum oranına bağlı olarak nüfus artışı ve zamana (gün, ay, yıl vb) bağlı olarak yatırım sonucunda elde edilen kar gibi olayları modellemede kullanılır.

Ayrık-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler



Ayrık-zaman gerçel üstel işaret $x[n] = C\alpha^n$

(a) $\alpha > 1$

(b) $0 < \alpha < 1$.

(c) $-1 < \alpha < 0$.

(d) $\alpha < -1$

Ayrık-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- Sürekli durumda olduğu gibi, karmaşık üstel işaretle yakından ilişkili bir işaret $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi)$ şeklinde tanımlanan sinüzoidal işarettir.

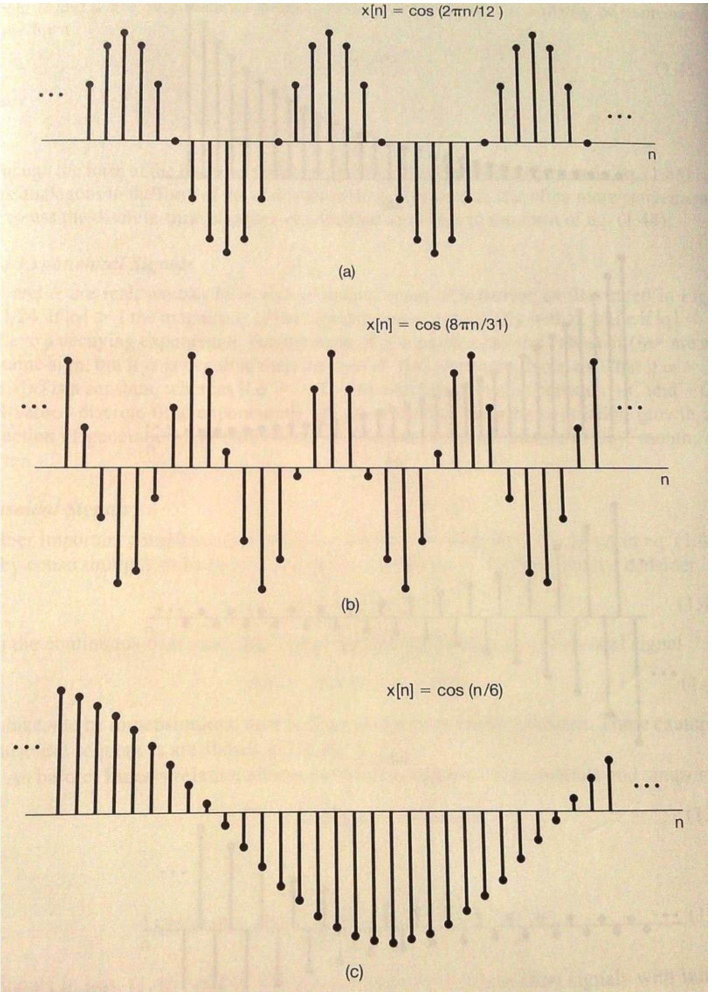
- *n* boyutsuz ise, ϕ ve ω_0'ın birimleri radyandır.

- Euler ilişkisi kullanılarak ayrık-zaman karmaşık üstel ve sinüzoidal işaretler birbirleri cinsinden yazılabilir:

$$e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + j\sin(\omega_0 n)$$
$$A\cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}$$

- Ayrık-zaman karmaşık üstel ve sinüzoidal işaretlerin, sürekli durumda olduğu gibi güç işaretleri olduğunu göstermek zor değildir.

Ayrık-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

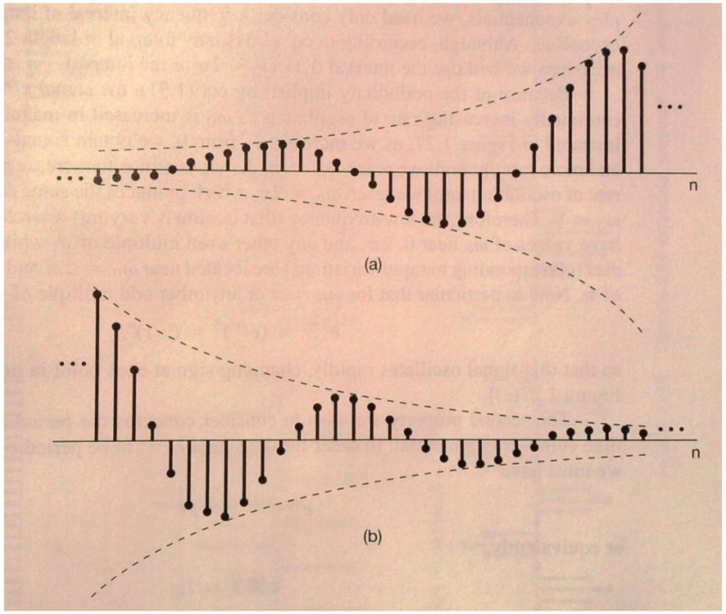


Ayrık-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- C ve α için kutupsal koordinatlarda $C = |C|e^{j\theta}$, $\alpha = |\alpha| e^{j\omega_0}$ yazılıp $C\alpha^n$ ifadesinde yerine konulursa ayrık-zaman karmaşık üstel işaret aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$C\alpha^n = |C||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \theta) + j|C||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \theta)$$

- $|\alpha| = 1$ ise, karmaşık üstel işaretin gerçel ve sanal kısımları sinüzoidaldir. $|\alpha| < 1$ ise, sinüzoidal işaretler azalan bir üstel işaretle, aksi halde ise artan bir üstel işaretle çarpılmaktadır.



Ayrık-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

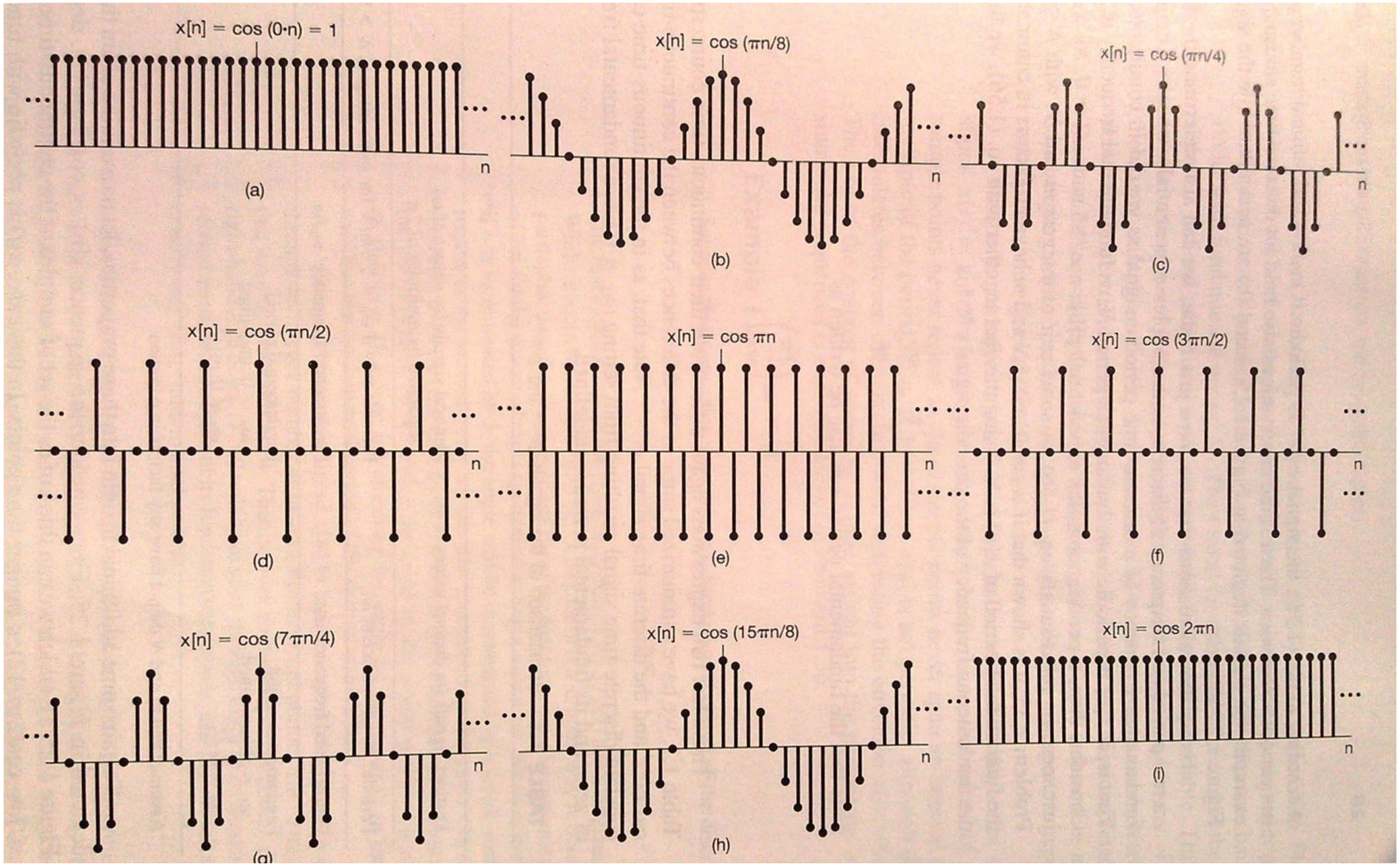
- Sürekli-zaman ve ayrık-zaman işaretler arasında önemli farklar vardır. Birinci fark olarak, aşağıda gösterildiği gibi $e^{j\omega_0 n}$, 2π ile periyodiktir:

$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j2\pi n}e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n}$$

- Sürekli durumda ω_0'ın farklı değerleri için $e^{j\omega_0 t}$ farklı işaretler olmasına karşın, ayrık-durumda $e^{j\omega_0 n}$ işaretinde ω_0 yerine $\omega_0 + 2\pi$, $\omega_0 + 4\pi$, $\omega_0 + 6\pi$… yazıldığında aynı sonuç elde edilmektedir. Bu yüzden, ayrık-zaman karmaşık üstel işaretleri 2π uzunluğundaki bir frekans aralığında incelemek yeterlidir. Genelde $0 \leq \omega_0 < 2\pi$ veya $-\pi \leq \omega_0 < \pi$ seçilir.

- $|\omega_0|$ arttıkça $e^{j\omega_0 t}$ işaretinin temel freakansı artıyordu. Ayrık durumda bu geçerli değildir. ω_0, 0'dan π'ye doğru artarken $e^{j\omega_0 n}$ işaretinin birim zamandaki salınım sayısı artarken π'den 0'a doğru artarken salınım sayısı azalır. O halde, ayrık-zaman karmaşık üstel işaret, ω_0'ın 0 veya π'nin çift katlarına yakın değerleri için düşük frekanslı, π'nin tek katlarına yakın değerleri içinse yüksek frekanslıdır.

Ayrık-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler



Ayrık-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

- $e^{j\omega_0 n}$ işaretinin periyodik olması için $e^{j\omega_0 (n+N)} = e^{j\omega_0 n}$ veya $e^{j\omega_0 N} = 1$ eşitliğini sağlayan pozitif bir tamsayı *N* bulunabilmeliydi. Karmaşık üstel işaretin 1 değerini alması için üs 2π'nin katı olmalıdır. O halde, *m* bir tamsayı olmak üzere periyodiklik şartı olarak $\omega_0/2\pi$'nin rasyonel bir sayı oması gerektiğini belirten

$$\omega_0 N = 2\pi m \Rightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

  yazılabilir (ikinci fark: sürekli işaret ω_0'ın herhangi bir değeri için periyodikti!). Bu koşul, ayrık-zaman sinüzoidal işaretler için de geçerlidir.

- Ayrık-zaman karmaşık üstel işaretin temel periyodu *N* ise, temel frekansı $2\pi/N$'dir. O halde, $e^{j\omega_0 n}$ işaretinin temel frekansı

$$\frac{2\pi}{N} = \frac{\omega_0}{m}$$

  olacaktır.

Ayrık-zaman üstel ve sinüzoidal işaretler

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
ω_0'ın farklı değerleri için farklı işaretler	2π ile periyodik
ω_0'ın herhangi bir değeri için periyodik	$N > 0$ ve m tamsayıları için $\omega_0 = 2\pi m/N$ ise periyodik
Temel frekans: ω_0	Temel frekans: ω_0/m
Temel periyod: $\omega_0=0$ ise tanımsızdır $\omega_0 \neq 0$ ise $2\pi/\omega_0$	Temel periyod: $\omega_0=0$ ise tanımsızdır $\omega_0 \neq 0$ ise $m(2\pi/\omega_0)$

- Son olarak, harmonik ilişkili bir ayrık-zaman karmaşık üstel kümesi, ortak bir periyod N'ye sahip periyodik üstel işaretler kümesidir:

$$\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

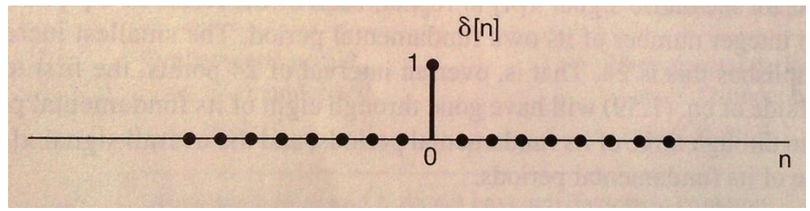
- Sürekli durumdan farklı olarak, periyodiklikten ötürü kümede N adet işaret olduğuna dikkat ediniz (sürekli durumda kümede sonsuz işaret vardı!).

Ayrık-zaman impuls ve birim basamak dizileri

TANIM: Ayrık-zaman İMPULS dizisi δ[*n*] aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

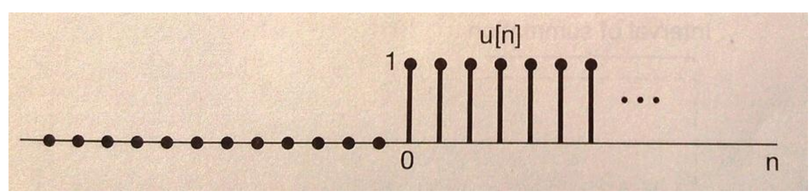
Dizinin grafik gösterilimi:



TANIM: Ayrık-zaman BİRİM BASAMAK dizisi *u*[*n*] aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

Dizinin grafik gösterilimi:



Ayrık-zaman impuls ve birim basamak dizileri

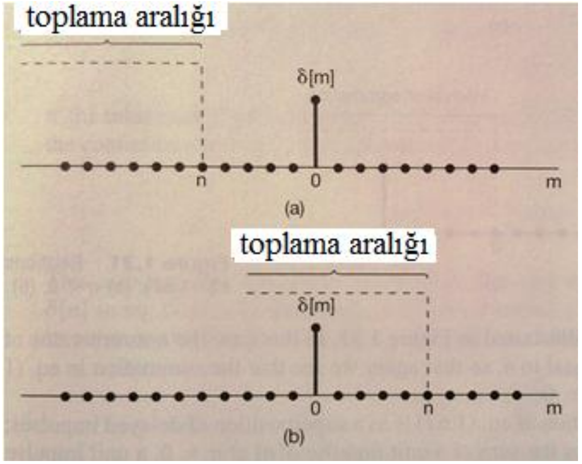
- Ayrık-zaman impuls ve birim basamak dizileri arasında aşağıdaki ilişkiler vardır:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

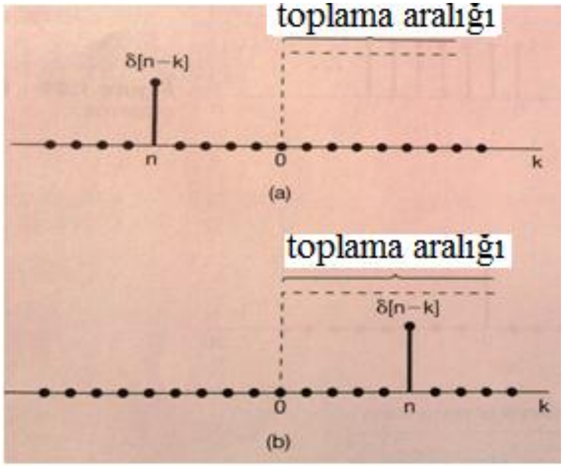
$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] \qquad (1.\text{ gösterilim })$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \qquad (2.\text{ gösterilim })$$

- Toplama işlemlerinin pozitif ve negatif *n* değerleri çin hesaplanması aşağıda gösterilmiştir:



1. gösterilim, a) $n < 0$, b) $n > 0$.



2. gösterilim, a) $n < 0$, b) $n > 0$

Ayrık-zaman impuls ve birim basamak dizileri

- Ayrık-zaman impuls dizisi, bir işareti $n = 0$ anındaki değerini değerini örneklemede kullanılabilir:

$$x[n]\,\delta[n] = x[0]\,\delta[n]$$

- Daha genel ifadeyle, $n = n_0$ anındaki bir impuls işaretin n_0 anındaki değerini örneklemde kullanılabilir:

$$x[n]\,\delta[n - n_0] = x[n_0]\,\delta[n - n_0]$$

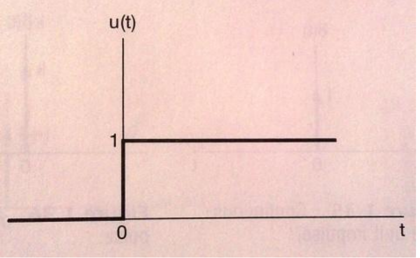
- İmpuls dizisinin örnekleme özelliği, doğrusal ve zamanla değişmeyen sistemlerin analizi ile sürekli-zaman işaretlerin ayrıklaştırıldığı örnekleme konularında sıkça kullanılacaktır.

Sürekli-zaman impuls ve birim basamak fonksiyonları

TANIM: Sürekli-zaman birim basamak fonkiyonu $u(t)$ aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Fonksiyonun grafik gösterilimi:



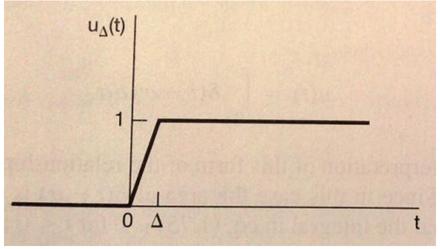
TANIM: Sürekli-zaman impuls fonksiyonu $\delta(t)$ aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

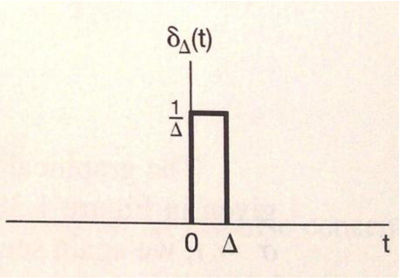
$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Not: $u(t)$, t = 0 anında sürekli olmayıp türevi hesaplanamayacağından $\delta(t)$'nin tanımı aslında geçerli değildir. Ancak, limit durumda birim basamak fonksiyonuna eşit olan yumuşak geçişli işaretler kullanılırsa tanım geçerli olacaktır.

Sürekli-zaman impuls ve birim basamak fonksiyonları

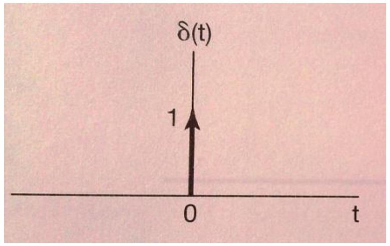
- Aşağıda, $\Delta \to 0$ limit durumunda $u(t)$'ye eşit olan, türevi tüm noktalarda hesaplanabilir bir fonksiyon $u_\Delta(t)$ ve fonksiyonun türevi $\delta_\Delta(t)$ verilmiştir.





- $\delta_\Delta(t)$, Δ'nın değerinden bağımsız olarak altındaki alan 1 olan kısa süreli bir darbedir. Δ, 0'a yaklaştıkça $\delta_\Delta(t)$ darlaşıp dikleşecek ancak altında kalan alan hep 1 olackatır. $\Delta \to 0$ limit durumunda darbenin süresi sıfır, yüksekliği sonsuz olacaktır. Bu durum grafiksel olarak şöyle gösterilir:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{du_\Delta(t)}{dt}$$



Sürekli-zaman impuls ve birim basamak fonksiyonları

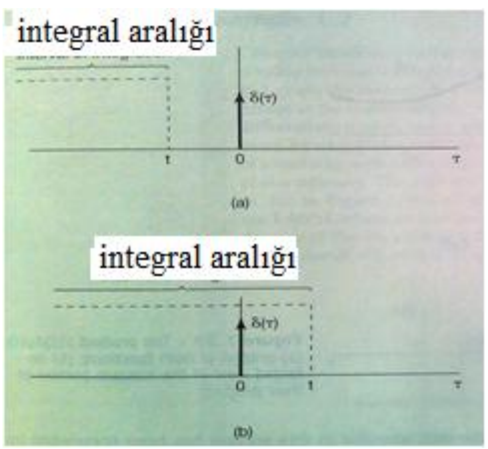
- Genel olarak, altındaki alan k olan ölçeklenmiş impuls fonksiyonu $k\delta(t)$ ile gösterilir ve grafik gösterilimde okun yanına 1 yerine k yazılır.

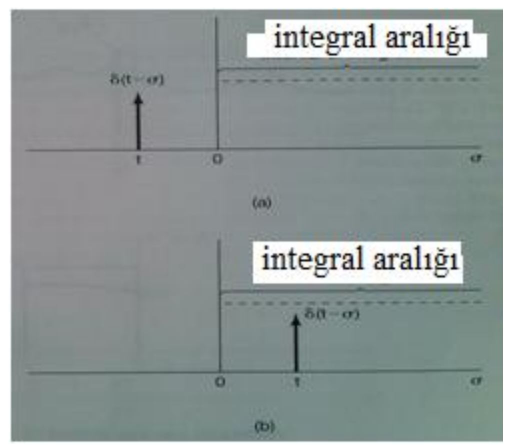
- $\delta(t)$, u(t)'nin türevi olduğundan, $u(t)$ $\delta(t)$'nin integralidir. İntegral eşdeğer iki şekilde yazılabilir:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \quad (1.\ \text{gösterilim})$$

$$u(t) = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad (2.\ \text{gösterilim})$$

- İntegrallerin pozitif ve negatif t değerleri için hesaplanması aşağıda gösterilmiştir:

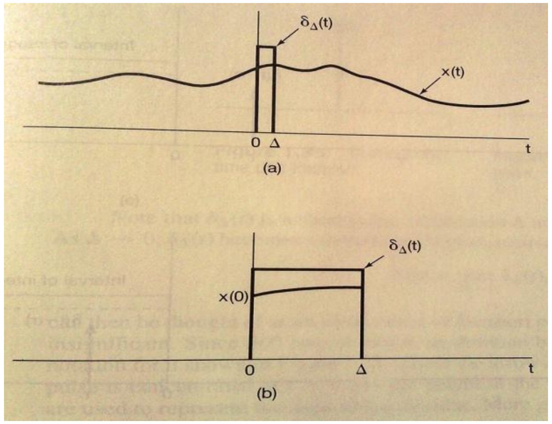




1. gösterilim, a) $t < 0$, b) $t > 0$. 2. gösterilim, a) $t < 0$, b) $t > 0$.

Sürekli-zaman impuls ve birim basamak fonksiyonları

- Sürekli-zaman impuls fonksiyonunun da örnekleme özelliği vardır. Aşağıda, keyfi bir $x(t)$ için, $x_1(t) = x(t)\delta_\Delta(t)$ çarpımı ve çarpımın sıfırdan farklı olduğu kısmın büyültülmüş hali gösterilmiştir.



- Yeterince küçük Δ için $0 \le t \le \Delta$ aralığında $x(t)$ yaklaşık olarak sabit olduğundan $x(t)\delta_\Delta(t) \approx x(0)\delta_\Delta(t)$ yazılabilir. $\Delta \rightarrow 0$ limit durumunda $\delta_\Delta(t)$, $\delta(t)$'ye eşit olduğundan impulsun örnekleme özelliği $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$ elde edilir.

- Benzer adımları kullanarak, $t = 0$ yerine $t = t_0$ anındaki bir impuls için örnekleme özelliği $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$ şeklinde olur.

Sürekli-zaman impuls ve birim basamak fonksiyonları

- Gerçek bir fiziksel sistem, eylemsizliğe sahiptir ve uygulanan girişlere aniden yanıt veremez. Dolayısıyla, sistemin yanıtı uygulanan darbenin süresi veya şeklinden ziyade darbenin altındaki alandan (darbenin toplam etkisinden) etkilenecektir.

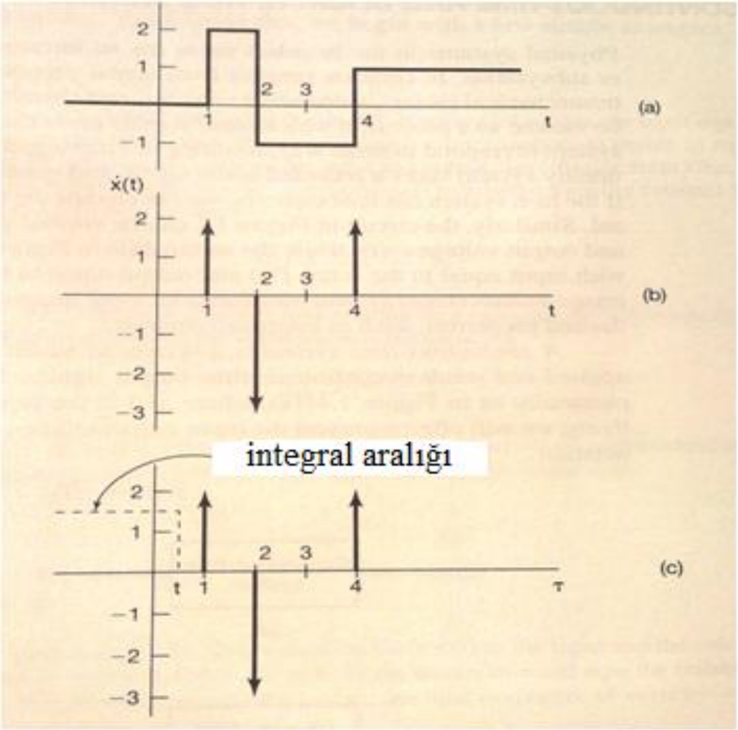
- Hızlı davranış gösteren sistemler için darbenin süresi, yanıt darbenin şekli veya süresinden etkilenmeyecek şekilde küçük olmalıdır. Herhangi bir gerçek fiziksel sistem için süresi yeterince küçük bir darbe bulabiliriz. İmpuls fonksiyonu, bu kavramın idealleştirilmişidir (herhangi bir sistem için yeterince küçük süreli darbe!).

- İmpuls ve ilişkli fonksiyonlara TEKİL veya GENELLEŞTİRİLMİŞ fonksiyonlar denilmektedir. Daha fazla bilgi aşağıdaki kaynaklardan edinilebilir:

A. H. Zemanian, *Distribution theory and transform analysis*, NY, McGraw-Hill, 1965.
R. F. Hoskins, Generalised functions, NY, Halsted Press, 1979.
M. J. Lighthill, *Fourier analysis and generalized functions*, NY, Cambridge University Press, 1958.

Sürekli-zaman impuls ve birim basamak fonksiyonları

- Süreksizlik içeren sürekli-zaman işaretlerinin türevi impuls fonksiyonu kullanılarak hesaplanabilir. Süreksizlik noktalarındaki türev impuls fonksiyonu oluşturur ve impulsun genliğini süreksizlik noktasındaki sıçrama miktarı belirler. Aşağıda bir örnek verilmiştir.



Türev doğru ise, b)'deki işaretin integrali a)'daki işareti vermelidir. c)'de herhangi bir t değeri için integral aralığı gösterilmiştir. Integral işleminin sonucu

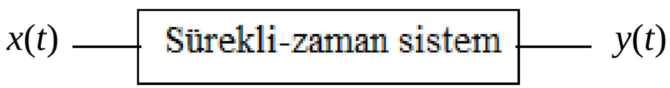
$t < 0$ ise 0
$1 \leq t < 2$ ise 2,
$2 \leq t < 4$ ise -1,
$t \geq 4$ ise 1

olup gerçekten de a)'daki işaret elde edilir.

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

- SİSTEM, girişine uygulanan bir işareti çıkışında başka bir işarete dönüştüren bir süreç olarak değerlendirilebilir.

- Sürekli-zaman sistemlerde giriş ve çıkış işaretleri sürekliyken; ayrık-zaman sistemlerde ayrıktır. Sistemler grafiksel olarak aşağıdaki şekilde gösterilir:



$x(t) \rightarrow y(t)$

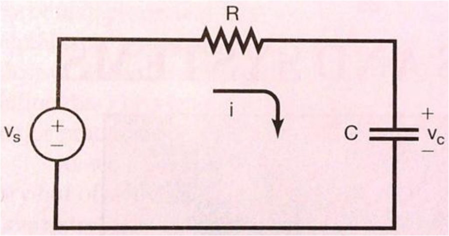
$x[n] \rightarrow y[n]$

- Bir işaret, başka bir işaret haline dönüştürülmek istendiğinde bir sürekli-zaman sistemi tasarlanabilir (analog çözüm). Ancak, işaret örneklenip ayrık-zaman haline getirildikten sonra aynı işlem bir ayrık-zaman sistem tasarlanarak da yapılabilir (sayısal çözüm). Sayısal çözümde elde edilen sonucun tekrar sürekli hale getirilmesi gerektiğine dikkat ediniz.

- Sayısal çözümün analog çözüme göre üstünlükleri oldukça fazladır. Bu konu SAYISAL İŞARET İŞLEME dersinde ele alınmaktadır.

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

Örnek: Bir sürekli-zaman sistemine örnek olarak, aşağıda verilen *RC* devresinde giriş işareti $v_s(t)$ ile çıkış işareti $v_c(t)$ arasındaki ilişkiyi bulalım.



Ohm yasasından, direnç üzerinden geçen akım, direnç üzerindeki gerilimin dirençin değerine bölünmesiyle elde edilir:

$$i(t) = \frac{v_s(t) - v_c(t)}{R}$$

Kapasitenin tanımından $i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}$

Bu iki eşitlikten, giriş ile çıkış arasındaki ilişki aşağıda verilen diferansiyel denklem olarak elde edilir:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}v_s(t)$$

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

Örnek: Bir ayrık-zaman sistemine örnek olarak, ay sonunda banka hesabındaki para miktarını ele alalım. $x[n]$ ay boyunca net para girişi (yatırılan-çekilen) ve $y[n]$ ay sonunda hesaptaki para olmak üzere, $y[n]$'nin aşağıda verilen fark denklemiyle belirlendiğini varsayalım:

$$y[n] = 1.01y[n-1] + x[n]$$

Modeldeki $1.01y[n-1]$ terimi, ilgili ayda % 1 oranında faizi modellemektedir.

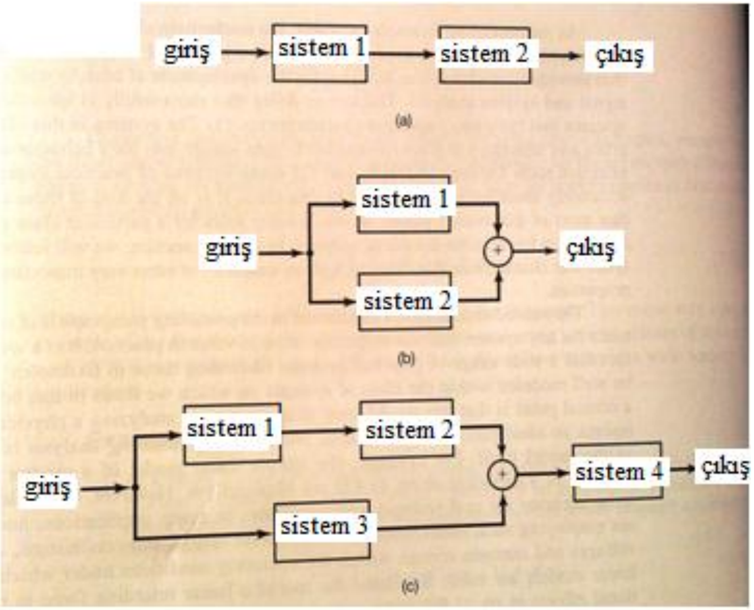
- Yukarıda verilen basit iki örnek, daha karmaşık sistemlere uyarlanabilir. Genelde, giriş ile çıkış arasındaki ilişki, sürekli-zaman sistemlerde diferansiyel denklemlerle, ayrık-zaman sistemlerde ise fark denklemleriyle verilir.

- Bu derste, sistemleri analiz edebilmek için etkili yöntemler (Fourier dönüşümü, z-dönüşümü vb) tanıtılacaktır.

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

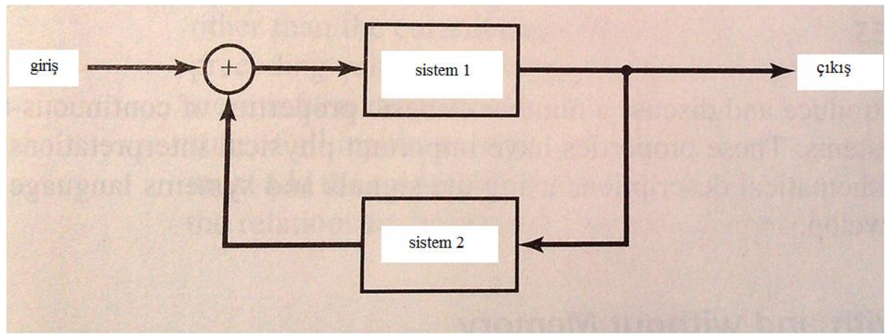
- Çoğu gerçek sistem, birkaç alt sistemden oluşmaktadır. Diğer bir deyişle, basit sistemler birleştirilerek karmaşık sistemler oluşturulabilir.

- Sistemleri çok değişik biçimlerde birbirleriyle bağlamak mümkündür. Ancak, sıklıkla kullanılan bağlama biçimleri SERİ, PARALEL ve SERİ-PARALEL olup bunlara karşılık gelen blok diyagramlar aşağıda verilmiştir.

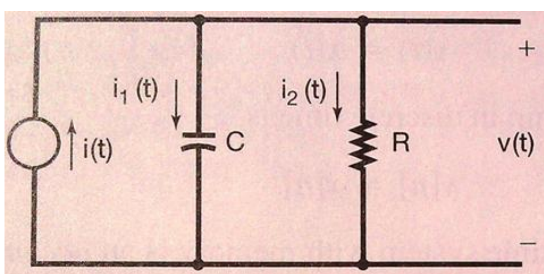


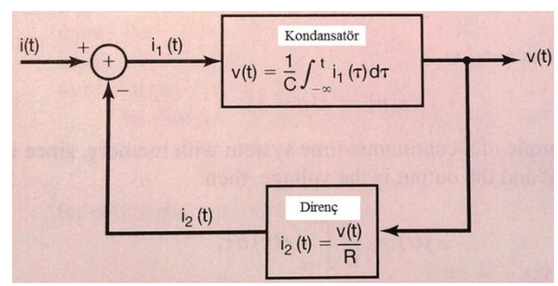
Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

- Diğer önemli bir sınıf, aşağıda gösterilen GERİBESLEMELİ bağlamadır.



- Geribesleme sistemleri birçok uygulamada kullanılmaktadır. Örneğin, sayısal olarak kontrol edilen bir uçak sisteminde gerçek ve gerekli hız, yön ve yükseklik arasındaki farklar gerekli düzeltmeleri yapmak üzere geri besleme işaretleri olarak kullanılır. Elektrik devrelerinde de geribesleme mevcuttur. Aşağıda bir elektrik devresi ve karşılık gelen blok diyagram verilmiştir





Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

- Herhangi bir andaki çıkışı, sadece o andaki girişine bağlı olan sistemlere HAFIZASIZ, aksi halde HAFIZALI denir.

- Hafızasıs sistemler:

$$y[n] = (2x[n] - x^2[n])^2$$
$$y(t) = R\, \mathrm{x}(t)$$

- Hafızalı sistemler:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$
$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

- Hafızalı sistemlerde, girişi çıkışın hesaplandığı an dışındaki zamanlarda saklayan mekanizmalar olmalıdır. Çoğu fiziksel sistemde, hafıza enerjinin depolanması ile doğrudan ilişkilidir. Örneğin, kondansatör elektriksel yük biriktirerek enerji saklar.

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

- Herhangi bir andaki çıkışı, girişin geçmişteki veya o andaki değerlerine bağlı olan sistemlere NEDENSEL denir.

- Nedensel sistemler:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

- Nedensel olmayan sistemler:

$$y[n] = x[n] - x[n+1]$$

$$y(t) = x(t+1)$$

- Bir sistemin nedensel olup olmadığı belirlenirken giriş-çıkış arasındaki ilişki tüm anlarda incelenmelidir. Ayrıca, giriş-çıkış arasındaki ilişkide girişten hariç diğer fonkiyonlar dikkate alınmamalıdır.

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

- Sınırlı girişler için sınırlı çıkışlar oluşturan sistemlere KARARLI, aksi halde KARARSIZ denir.

- Kararlı sistemler:

$$y[n] = \frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M} x[n-k]$$
$$y(t) = e^{x(t)}$$

- Kararsız sistemler:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$
$$y(t) = tx(t)$$

- Bir sistemin kararsız olduğunu göstermek için iyi bir yaklaşım, sonsuz bir çıkış üreten sonlu bir giriş bulmaktır. Ancak, bu herzaman mümkün olmayabilir. Bu gibi durumlarda, giriş işaretinden bağımsız olarak çalışan bir yöntem kullanılmalıdır.

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

- Bir sistemde, giriş işaretine uygulanan bir öteleme çıkış işaretinde de aynı miktarda ötelemeye neden oluyorsa sisteme ZAMANLA DEĞİŞMEYEN, aksi halde zamanla değişen denir.

- Örnek: Giriş-çıkış ilişkisi

$$y(t) = \sin[x(t)]$$

ile verilen sistemi ele alalım. Giriş işaretine t_0 kadar bir öteleme uygulayalım, yani $x_2(t) = x(t\text{-}t_0)$ olsun. Sistemin $x_2(t)$'ye yanıtı, $y_2(\mathrm{t}) = \sin\ [x_2(t)] = \sin[x(t\text{-}t_0)]$'dir. Çıkışın t_0 kadar ötelenmişi, $y(t\text{-}t_0) = \sin[x(t\text{-}t_0)]$'dir. Giriş işaretine uygulanan öteleme, çıkışta da aynı miktarda ötelemeye sebep olup bu sistem zamanla değişmeyendir

- Örnek: Giriş-çıkış ilişkisi

$$y[n] = nx[n]$$

olan sistemin zamanla değiştiği, benzer işlemler takip edilerek gösterilebilir.

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

- İki veya daha fazla işaretin toplamından oluşan bir girişe olan yanıtı, giriş işaretini oluşturan bileşenlere yanıtlarının toplamına eşit olan sistemlere DOĞRUSAL denir.

- Doğrusallığın matematiksel tanımı, sürekli-zaman sistemleri için aşağıda verilmiştir. Tanım, ayrık-zaman durumunda da geçirlidir.

- Bir sisteme uygulanan $x_k(t)$ girişlerine karşılık gelen çıkışlar $y_k(t)$, k = 1,2,... olsun. a_k'lar katsayı olmak üzere, sistemin

$$x(t) = \sum_k a_k x_k(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + a_3 x_3(t) + \ldots$$

girişine yanıtı

$$y(t) = \sum_k a_k y_k(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + a_3 y_3(t) + \ldots$$

ise, sistem doğrusaldır.

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

Örnek: Giriş-çıkış ilişkisi $y(t) = tx(t)$ olan sistemin doğrusal olup olmadığını belirleyelim. Sistemin, keyfi iki giriş işareti $x_1(t)$ ve $x_2(t)$'ye olan yanıtı

$$x_1(t) \to y_1(t) = tx_1(t)$$
$$x_2(t) \to y_2(t) = tx_2(t)$$

olsun. a ve b katsayılar olmak üzere, $x_1(t)$ ve $x_2(t)$'nin ağırlıklı toplamı $x_3(t)$ olsun:

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

Sistemin $x_3(t)$'ye olan yanıtı

$$\begin{aligned} y_3(t) &= tx_3(t) \\ &= t(ax_1(t) + bx_2(t)) \\ &= atx_1(t) + btx_2(t) \\ &= ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

şeklinde olup sistem doğrusaldır.

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

Örnek: Giriş-çıkış ilişkisi $y(t) = x^2(t)$ olan sistemin doğrusal olup olmadığını belirleyelim. Sistemin, keyfi iki giriş işareti $x_1(t)$ ve $x_2(t)$'ye olan yanıtı

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1^{\,2}(t)$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2^{\,2}(t)$$

olsun. a ve b katsayılar olmak üzere, $x_1(t)$ ve $x_2(t)$'nin ağırlıklı toplamı $x_3(t)$ olsun:

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

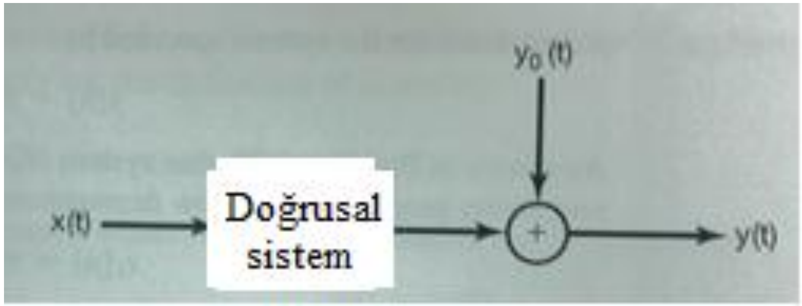
Sistemin $x_3(t)$'ye olan yanıtı

$$\begin{aligned} y_3(t) &= x_3^{\,2}(t) \\ &= (ax_1(t) + bx_2(t))^2 \\ &= a^2 x_1^{\,2}(t) + b^2 x_2^{\,2}(t) + 2abx_1(t)x_2(t) \\ &= a^2 y_1(t) + b^2 y_2(t) + 2abx_1(t)x_2(t) \end{aligned}$$

olup sistem doğrusal değildir.

Sürekli-zaman ve ayrık-zaman sistemler

Örnek: Giriş-çıkış ilişkisi $y[n] = 2x[n]+3$ olan sistemin doğrusal olmadığını göstermek zor değildir. Giriş-çıkış ilişkisi doğrusal olmasına rağmen, sistemin doğrusal olmaması ilginçtir. Bu sistemin çıkışı, aşağıda gösterildiği gibi doğrusal bir sistemin çıkışıyla sistemin SIFIR-GİRİŞ yanıtına eşit olan bir işaretin toplamı olarak düşünülebilir:



Örneğimizde doğrusal sistem $x[n] \rightarrow 2x[n]$, sıfır-giriş yanıtı $y_0[n] = 3$'dür. Böyle sistemlerde, iki girişe olan yanıtlar arasındaki fark, girişlerin farkının doğrusal bir fonksiyonudur:

$$y_1[n] - y_2[n] = 2x_1[n] + 3 - \{2x_2[n] + 3\} = 2\{x_1[n] - x_2[n]\}$$

Bu tür sistemlere ARTIŞSAL DOĞRUSAL sistem denilmektedir.